EXTRAIT DU BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES. SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES
JANVIER 1911

ÜBER DIE WECHSELWIRKUNG VON KUGELN DIE SICH IN EINER ZÄHEN FLÜSSIGKEIT BEWEGEN

VON

M. SMOLUCHOWSKI

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1911

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE A ÉTÉ FONDÉE EN 1873 PAR

S. M. L'EMPEREUR FRANÇOIS JOSEPH I

PROTECTEUR DE L'ACADÉMIE:

S. A. I. L'ARCHIDUC FRANÇOIS FERDINAND D'AUTRICHE-ESTE.

VICE-PROTECTEUR: *Vacat.*

PRÉSIDENT: S. E. M. LE COMTE STANISLAS TARNOWSKI.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL: M. BOLESLAS ULANOWSKI.

EXTRAIT DES STATUTS DE L'ACADÉMIE:

(§ 2). L'Académie est placée sous l'auguste patronage de Sa Majesté Impériale Royale Apostolique. Le Protecteur et le Vice-Protecteur sont nommés par S. M. l'Empereur.

(§ 4). L'Académie est divisée en trois classes:

a) Classe de Philologie,

b) Classe d'Histoire et de Philosophie,

c) Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles.

(§ 12). La langue officielle de l'Académie est la langue polonaise.

Depuis 1885, l'Académie publie le «Bulletin International» qui paraît tous les mois, sauf en août et septembre. Le Bulletin publié par les Classes de Philologie, d'Histoire et de Philosophie réunies, est consacré aux travaux de ces Classes. Le Bulletin publié par la Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles paraît en deux séries. La première est consacrée aux travaux sur les Mathématiques, l'Astronomie, la Physique, la Chimie, la Minéralogie, la Géologie etc. La seconde série contient les travaux se rapportant aux Sciences Biologiques.

Publié par l'Académie
sous la direction de M. **Ladislas Natanson,**
Secrétaire de la Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles.

16 lutego 1911.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Kraków, 1911. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem Józefa Filipowskiego.

EXTRAIT DU BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES. SÉRIE A: SCIENCES MATHÉMATIQUES
JANVIER 1911

ÜBER DIE WECHSELWIRKUNG VON KUGELN DIE SICH IN EINER ZÄHEN FLÜSSIGKEIT BEWEGEN

VON

M. SMOLUCHOWSKI

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1911

O oddziaływaniu wzajemnem kul, poruszających się w cieczy lepkiej. — Über die Wechselwirkung von Kugeln, die sich in einer zähen Flüssigkeit bewegen.

Mémoire

de M. ***MARYAN SMOLUCHOWSKI*** m. c.,

présenté dans la séance du 9 Janvier 1911.

Die nachfolgende Untersuchung bezweckt die Beantwortung der Frage, inwieweit die Bewegung einer in einem zähen Medium befindlichen Kugel durch die Anwesenheit (oder Bewegung) einer oder mehrerer anderer Kugeln modifiziert wird. Die Resultate, welche sich diesbezüglich ergeben haben, sind, abgesehen von ihrem rein theoretischen Interesse für die Hydrodynamik, auch durch ihre Anwendung auf die Bewegung von Nebelteilchen von Wichtigkeit, indem sie die Gültigkeit des Stokes'schen Gesetzes erheblich einschränken, und mögen vielleicht unter anderem auch zur Aufklärung der Divergenzen beitragen, welche bei den darauf gestützten, von verschiedenen Beobachtern vorgenommenen Bestimmungen der Elektronenladung auftreten.

I. Strömung bei Gegenwart zweier Kugeln.

Um die Wechselwirkung zweier Kugeln zu studieren, kann man eine Annäherungsmethode anwenden, welche auf sukzessiver Superponierung partikulärer Lösungen beruht, analog den Spiegelungsmethoden, welche zur Lösung verschiedener Probleme der mathematischen Physik — wie elektrostatische Wechselwirkung zweier Kugeln (Murphy), Bewegung zweier Kugeln in einer idealen Flüssigkeit (Lamb, Hydrodynamics S. 122), Modifizierung eines Bewegungszustandes einer zähen Flüssigkeit durch eine unendliche Wand (H. A. Lorentz und die voranstehende Arbeit von J. Stock) — verwendet werden.

Nehmen wir an, daß sich in einer zähen Flüssigkeit, welche im Unendlichen ruht, eine ruhende Kugel (vom Radius b) und in der Entfernung R eine mit der Geschwindigkeit $u = -1$ längs der X' Achse fortschreitende Kugel (vom Radius a) befinden. Dann gehen wir von den bekannten Stokes'schen Gleichungen für den stationären Strömungszustand in der Nähe einer bewegten Kugel aus, deren Mittelpunkt sich gerade momentan im Koordinaten-Anfangspunkt befinden möge[1]):

$$(1)\ldots\quad \begin{cases} u = -\frac{3}{4}\frac{a}{r} - \frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3} - \frac{3}{4}\frac{ax'^2}{r^3}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \\ v = \qquad\qquad\qquad -\frac{3}{4}\frac{ax'y'}{r^3}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Für die Oberfläche der um den Punkt x, y, z mit dem Radius b gelegten Kugel würden dann hieraus gewisse Strömungsgeschwindigkeiten resultieren, welche durch Entwicklung von (1) nach Potenzen der Größen

$$\xi = x' - x, \quad \eta = y' - y, \quad \zeta = z' - z$$

in der angenäherten Form erhalten werden:

$$(2)\ldots\quad \begin{cases} u_1 = -\frac{3}{4}\frac{a}{R} - \frac{3}{4}\frac{ax^2}{R^3} + \frac{3}{4}\frac{ax\xi}{R^3}\left(-1 + \frac{3x^2}{R^2}\right) + \\ \qquad + \frac{3}{4}\frac{ay\eta}{R^3}\left(1 + \frac{3x^2}{R^2}\right) + \frac{3}{4}\frac{az\zeta}{R^3}\left(1 + \frac{3x^2}{R^2}\right) \\ v_1 = \qquad -\frac{3}{4}\frac{axy}{R^3} + \frac{3}{4}\frac{ay\xi}{R^3}\left(-1 + \frac{3x^2}{R^2}\right) + \\ \qquad + \frac{3}{4}\frac{ax\eta}{R^3}\left(-1 + \frac{3y^2}{R^2}\right) + \frac{9}{4}\frac{axyz\zeta}{R^5} \\ w_1 = \qquad -\frac{3}{4}\frac{axz}{R^3} + \frac{3}{4}\frac{az\xi}{R^3}\left(-1 + \frac{3x^2}{R^2}\right) + \\ \qquad + \frac{9}{4}\frac{axyz\eta}{R^5} + \frac{3}{4}\frac{ax\zeta}{R^3}\left(-1 + \frac{3z^2}{R^3}\right) \\ p_1 = p_0 - \frac{3}{2}\frac{\mu ax}{R^3}\left[1 - \frac{3(x\xi + y\eta + z\zeta)}{R^2}\right] - \frac{3}{2}\frac{\mu a\xi}{R^3} \end{cases}$$

[1]) Dies setzt allerdings das Bestehen eines quasi-stationären Zustandes voraus, was eine im Vergleich zur Dichte große Zähigkeit erfordert. Doch werden wir die Schlußfolgerungen nur auf wirklich stationäre Bewegungen anwenden.

Dabei sind die Radien als klein im Verhältnis zur Entfernung der Kugeln (mit R bezeichnet) vorausgesetzt, daher sind hier wie auch in den folgenden Rechnungen nur noch Ausdrücke von der Ordnung $(a/R)^2$, ab/R^2, $(b/R)^2$ im Verhältnis zur Einheit berücksichtigt worden.

Soll aber die Kugel b ein ruhender starrer Körper sein, so müssen die Geschwindigkeiten an deren Oberfläche Null sein, und dies erreichen wir durch Superposition eines solchen Strömungszustandes u_2, v_2, w_2, welcher 1) den hydrodynamischen Zähigkeitsgleichungen entspricht, 2) im Unendlichen die Geschwindigkeit Null, 3) in der Kugeloberfläche die Geschwindigkeiten $-u_1$, $-v_1$, $-w_1$ besitzt.

Diesen Strömungszustand u_2, v_2, w_2 (welchen wir „den an der Kugel b reflektierten Bewegungszustand" nennen wollen) finden wir aus der von Lamb (Hydrodynamics S. 550) angegebenen allgemeinen Lösung der hydrodynamischen Gleichungen für zähe Flüssigkeiten:

$$(3)\ldots\; u = \frac{1}{\mu}\sum\left[\frac{r^2}{2(2n+1)}\frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_n}{r^{2n+1}}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + z\,\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y\,\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right] \quad \text{u. s. w.},$$

wenn wir die darin enthaltenen Kugelfunktionen p_n, φ_n, χ_n aus jenen Bedingungen 2) und 3) bestimmen.

So erhalten wir durch Einsetzen der Kugelfunktionen φ_{-2}, φ_{-3}, p_{-2}, p_{-3}, χ_{-2} in (3) und Vergleichung mit (2) nach ziemlich umständlicher Rechnung:

(Sieh Seite 31).

worin ξ, η, ζ, r die Koordinaten und die Entfernung des gegebenen Punktes in bezug auf den Mittelpunkt der Kugel b bedeuten. Ein analoger Ausdruck folgt für w_2 durch Vertauschung von y, η mit z, ζ.

Nun erfüllt der Strömungszustand $u + u_2$, $v + v_2$, $w + w_2$ zwar die Bedingung des Haftens an der Kugel b, aber dafür bleiben jetzt in der Oberfläche von a gewisse Geschwindigkeiten von u_2, v_2, w_2 übrig — allerdings von kleinerer Größenordnung — welche

$$
(4)\dots\left\{
\begin{aligned}
u_2 = {} & \frac{3ab}{16\,Rr}\left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)\left(3+\frac{b^2}{r^2}\right)-\tfrac{3}{4}\,\frac{ab^3}{R^3r^3}\left(1+\frac{3b^2x^2}{R^2r^2}\right)(x\xi+y\eta+z\zeta)+ \\
& +\tfrac{3}{8}\,\frac{ab^3x\xi}{R^3r^3}\left[7-\frac{3b^2}{r^2}-15\,\frac{x^2\xi^2+y^2\eta^2+z^2\zeta^2}{R^2r^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\right]+\tfrac{9}{16}\,\frac{ab\xi^2}{Rr^3}\left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)+ \\
& +\tfrac{9}{16}\,\frac{abx\xi}{R^3r^3}(\eta y+z\zeta)\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)-\tfrac{45}{4}\,\frac{ab^3x\xi}{R^5r^5}(xy\xi\eta+xz\xi\zeta+yz\eta\zeta)\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right) \\
v_2 = {} & \tfrac{3}{16}\,\frac{abxy}{R^3r}\left(3+\frac{b^2}{r^2}\right)+\tfrac{3}{4}\,\frac{ab^3y\xi}{R^3r^3}\left(1-\frac{3b^2x^2}{R^2r^2}\right)-\tfrac{9}{4}\,\frac{ab^5xyz\zeta}{R^5r^5}- \\
& -\tfrac{15}{8}\,\frac{ab^3x\eta}{R^3}\left[2-\frac{3(x^2+y^2)}{R^2}\right]+\tfrac{9}{8}\,\frac{ab^5x\eta}{R^3}\left[4-\frac{5x^2+7y^2}{R^2}\right]+\tfrac{9}{16}\,\frac{ab\xi\eta}{Rr^3}\left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)+ \\
& +\tfrac{9}{16}\,\frac{abx\eta}{R^3r^3}(y\eta+z\zeta)\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)+\tfrac{45}{8}\,\frac{ab^3x\xi^2\eta}{R^3r^5}\left(1-\frac{2x^2+y^2}{R^2}\right)\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)+ \\
& +\tfrac{45}{8}\,\frac{ab^3x\eta^3}{R^3r^5}\left(1-\frac{x^2+2y^2}{R^2}\right)\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)-\tfrac{45}{4}\,\frac{ab^3x\eta}{R^5r^5}(xy\xi\eta+yz\eta\zeta+xz\xi\zeta)\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

wir durch Reihenentwicklung von (4) in der Näherungsform erhalten:

$$(5)\dots\quad \left|\begin{aligned} u_3 &= \tfrac{9}{16}\frac{ab}{R^2} + \tfrac{27}{16}\frac{abx^2}{R^4} \\ v_3 &= \tfrac{27}{16}\frac{abxy}{R^4} \\ w_3 &= \tfrac{27}{16}\frac{abxz}{R^4} \end{aligned}\right.$$

Diese müssen somit abermals durch Superposition eines Bewegungszustandes u_4, v_4, w_4 neutralisiert werden, welcher im Unendlichen verschwindet und an der Oberfläche $r = a$ die Werte (5) mit negativem Vorzeichen besitzt; man könnte ihn „den an b und a reflektierten Strömungszustand" nennen.

Dies verursacht nun keinerlei Schwierigkeiten, da ja die Größen (5) Konstanten sind, also unmittelbar die Anwendung der Stokes'schen Gleichungen gestatten. Die u_4, v_4, w_4 werden sich somit aus je drei analog (1) gebauten und mit den Konstanten u_3, v_3, w_3 multiplizierten Gliedern zusammensetzen:

$$(6)\dots u_4 = -\frac{a u_3}{4r}\left(3 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{3}{4}\frac{ax'}{r^3}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)(u_3 x' + v_3 y' + w_3 z')$$

deren explicite Ausrechnung jedoch für das Weitere nicht nötig ist.

Die Summe $u + u_2 + u_4$ etc. stellt somit den resultierenden Bewegungszustand in der Nähe von a vor, während in Entfernungen von der Größenordnung R bereits die Glieder $u + u_2$ genügen, da u_4 daselbst nur mehr die Größenordnung a^3/R^3 besitzt, welche wir vernachlässigen. Wollte man in der Entwicklung (2) auch noch höhere Glieder berücksichtigen, so müßte man natürlich eine entsprechend größere Anzahl von „vielfachen Reflexionen" in Rechnung ziehen.

II. Druckkräfte zwischen zwei Kugeln.

Nun handelt es sich um die Bestimmung der resultierenden Druckkräfte und Momente, welche die Kugeln a und b seitens der Flüssigkeit erfahren. Hiezu berechnen wir einzeln die Bestandteile, welche von den übereinander superponierten Bewegungszuständen

stammen, und das ergibt bei Benützung der bekannten Formel (Lamb, Hydrodynamics S. 552)

$$(7)\ldots \qquad p_{rx} = -\frac{x}{r}p + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial x}(ux + vy + wz),$$

daß die Geschwindigkeiten u_1, v_1, w_1 auf die Kugel b nur Druckkräfte von der Ordnung ab^3/R^3 ausüben, welche im Verhältnis zu den übrigen Größen zu vernachlässigen sind.

Auf die ruhende Kugel b wirken somit nur die aus dem Bewegungszustand u_2, v_2, w_2 abgeleiteten Kräfte, welche am einfachsten mittels der durch Substitution von (3) in (7) leicht abzuleitenden Formel

$$(8) \quad p_{rx} = \sum \frac{n(2n^2+5n+2)}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} r \frac{\partial p_n}{\partial x} - \frac{2n^2+4n+3}{(n+1)(n+3)} \frac{x}{r} p_n + \\ + \frac{2(n-1)}{r}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + (n-1)\mu\left(\frac{z}{r}\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - \frac{y}{r}\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right)$$

berechnet werden, nämlich:

$$(9)\ldots \qquad \begin{aligned} X &= -\tfrac{9}{2}\frac{ab\pi\mu}{R}\left[1 + \frac{x^2}{r^2}\right] \\ Y &= -\tfrac{9}{2}\frac{ab\pi\mu xy}{R^3} \\ Z &= -\tfrac{9}{2}\frac{ab\pi\mu xz}{R^3}. \end{aligned}$$

Dieselben Ausdrücke würden sich auch aus der Stokes'schen Widerstandsformel ergeben, wenn man für den Ort der Kugel b ein gleichförmiges Strömungsfeld (mit der aus (1) für den Mittelpunkt der Kugel b folgenden Geschwindigkeit) annähme.

Die infolge der Anwesenheit der ruhenden Kugel b auf a rückwirkenden Reaktionskräfte folgen dagegen einfach aus dem Stokes'schen Widerstandsgesetz in Verbindung mit (5); somit erfährt die sich bewegende Kugel a die Kräfte:

$$(10)\ldots \qquad \begin{aligned} X &= 6a\pi\mu\left[1 + \tfrac{9}{16}\frac{ab}{R^2}\left(1 + \frac{3x^2}{R^2}\right)\right] \\ Y &= \tfrac{81}{8}\frac{a^2b\pi\mu xy}{R^4} \\ Z &= \tfrac{81}{8}\frac{a^2b\pi\mu xz}{R^4} \end{aligned}$$

das ist einen vergrößerten Widerstand in der Bewegungsrichtung und außerdem noch transversale Kräfte.

Würde umgekehrt die Kugel a ruhen, dagegen b die Geschwindigkeit $u = -1$ besitzen, so würden auf a Kräfte wirken, die mit (9) identisch sind. Bewegen sich nun beide Kugeln mit derselben Geschwindigkeit $u = -1$, so erhält man die auf a wirkenden Kräfte durch Superposition der von ruhendem b in bezug auf bewegtes a und von bewegtem b in bezug auf ruhendes a ausgeübten Drücke, nämlich:

$$(11)\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} X &= 6\pi a\mu \left[1 - \tfrac{3}{4}\frac{b}{R}\left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right) + \tfrac{9}{16}\frac{ab}{R^2}\left(1 + \frac{3x^2}{R^2}\right)\right] \\ Y &= -\tfrac{9}{2}\frac{ab\pi\mu xy}{R^5}\left[1 - \tfrac{9}{4}\frac{a}{R}\right] \quad \text{u. s. w.} \end{aligned} \right.$$

Die auf b wirkenden Kräfte betragen in analoger Weise:

$$(12)\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} X &= 6\pi b\mu \left[1 - \tfrac{3}{4}\frac{a}{R}\left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right) + \tfrac{9}{16}\frac{ab}{R^2}\left(1 + \frac{3x^2}{R^2}\right)\right] \\ Y &= -\tfrac{9}{2}\frac{ab\pi\mu xy}{R^3}\left[1 - \tfrac{9}{4}\frac{b}{R}\right] \quad \text{u. s. w.} \end{aligned} \right.$$

Hieraus ist folgendes ersichtlich:

1) Bewegen sich zwei Kugeln parallel zueinander mit gleicher Geschwindigkeit c, so ist der Widerstand einer jeden derselben in erster Annäherung um die Größe

$$\tfrac{9}{2}\frac{ab\pi\mu c}{R}$$

vermindert, also ist die Fallgeschwindigkeit bei gegebener Größe der Kugeln im Vergleich zum Stokes'schen Gesetze vergrößert.

2) Außerdem wirkt längs der Verbindungslinie der Kugeln, und zwar in der Richtung von der rückwärtigen zur voranschreitenden. hin eine Kraft, welche in erster Annäherung durch

$$\tfrac{9}{2}\frac{ab\pi\mu cx}{R^2}$$

gegeben ist, also für beide Kugeln gleich gerichtet und gleich groß ist.

Interessant ist hierin der auffallende Widerspruch mit dem Satze von Wirkung und Gegenwirkung, der aber insofern selbstverständ-

lich ist, als zwischen den Kugeln keine inneren Kräfte wirken, sondern die Flüssigkeit mitberücksichtigt werden muß.

3) Uberdies ergibt die Rechnung auf Grund von (7) und (8), daß die Kugeln von Drehungsmomenten beansprucht werden. Dieselben betragen z. B. für die Kugel b:

$$M = \frac{4\,a\,b^3 \mu c \pi}{R^3}\left[1 + \tfrac{3}{2}\frac{x^2}{R^2}\right]\sqrt{y^2 + z^2}$$

und suchen eine Rotation um eine zur X-Achse und zur Verbindungslinie senkrechte Achse in dem Sinne hervorzubringen, als ob sich der Bewegungswiderstand vor allem an der Außenseite des aus den zwei Kugeln bestehenden Systems fühlbar machen würde[1]).

III. System von n Kugeln.

Mittels der oben dargelegten Methode kann auch die Bewegung eines Systems von n Kugeln untersucht werden. Bewegen sich z. B. sämtliche Kugeln parallel mit gleicher Geschwindigkeit, so kann man dies auffassen als Superposition von n solchen Bewegungszuständen, in welchen sich je eine der n Kugeln bewegt und alle übrigen in Ruhe sind.

Beschränkt man sich auf Glieder derselben Größenordnung wie vorhin, so ist in jedem dieser Bewegungszustände nicht nur der direkte, nach (9) zu berechnende Einfluß der bewegten Kugel auf die betrachtete Kugel zu berücksichtigen, sondern auch die einmaligen „Reflexionen" desselben an den übrigen ruhenden Kugeln.

Der Widerstand der Kugel 1 in der Bewegungsrichtung wird daher gegeben sein durch:

$$(13)\ldots\quad X = 6\pi a_1 c\mu \left\{1 - \tfrac{3}{4}\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{R_k}\left(1 + \frac{x_k^2}{R_k^2}\right) + \right.$$
$$+ \tfrac{9}{16}\sum\sum \frac{a_k a_m}{R_k R_{km}}\left[\left(1 + \frac{x_k^2}{R_k^2}\right)\left(1 + \frac{x_{km}^2}{R_{km}^2}\right) + \frac{x_k y_k x_{km} y_{km}}{R_k R_{km}} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{x_k z_k x_{km} z_{km}}{R_k R_{km}}\right]\right\}$$

[1]) Es sei ausdrücklich bemerkt, daß man aus diesen Resultaten nicht auf den Einfluß einer unendlichen ebenen Wand schließen darf (siehe die voranstehende Arbeit von J. Stock), indem man a und R unendlich macht, da dann die Entwicklung (2) nicht statthaft ist.

worin die mit dem Index k versehenen Zeichen die Koordinaten der k-ten Kugel in bezug auf die Kugel 1, die mit dem Index k_m versehenen Zeichen die relativen Koordinaten der m-ten in bezug auf die k-te Kugel bedeuten.

Handelt es sich nun um eine aus sehr vielen gleichmäßig verteilten Kugeltröpfchen gleicher Größe gebildete Nebelwolke, so kann das erste Korrektionsglied der Stokes'schen Formel durch Bildung eines über das Volum der Wolke zu erstreckenden Mittelwertes ersetzt werden:

$$\frac{9}{8}\, an \frac{\int r^2 \sin\varphi\,(1 + \cos^2\varphi)\, d\varphi\, d\varepsilon}{\int r^3 \sin\varphi\, d\varphi\, d\varepsilon},$$

welcher offenbar von der Größenordnung an/S ist, wo S eine den Lineardimensionen der Wolke vergleichbare Größe bedeutet. Ist dieses Glied klein gegenüber der Einheit, so sind die höheren Glieder der Entwicklung (13), welche abwechselnd ein positives und negatives Zeichen haben werden, zu vernachlässigen, und nur in diesem Falle ist die Stokes'sche Formel angenähert richtig.

Dabei ist zu bemerken, daß diese Korrektion, welche eine Verminderung des Widerstandes (also bei gleicher Schwere eine Vergrößerung der Fallgeschwindigkeit) bedeutet, nicht nur von der Größe und den mittleren Abständen der Tröpfchen, sondern auch von der Lage derselben innerhalb der Wolke abhängt, und für solche, welche in der Mitte liegen, offenbar mehr ausmacht, als für die an der Außenfläche befindlichen Tröpfchen.

Nennen wir die pro Volumeinheit der Wolke entfallende Anzahl der Tröpfchen ν, so kann man die Bedingung der angenäherten Gültigkeit des Stokes'schen Gesetzes auch so ausdrücken, daß $a\nu S^2 << 1$ sei. Also hängt im Gegensatz zur üblichen Meinung die Gültigkeit jenes Gesetzes offenbar auch von Gestalt und Größe der Nebelwolke ab.

Werden die linearen Dimensionen der Wolke größer als

$$S > \frac{1}{\sqrt{a\nu}},$$

so wird die Reihenentwicklung (13) divergent. Dies würde allerdings von vornherein nur beweisen, daß die oben dargelegte Berechnungsmethode für diesen Fall ihre Anwendbarkeit verliert und daß man über denselben nichts Bestimmtes aussagen kann.

Es kann aber leicht in anderer Weise gezeigt werden, welche Bedeutung jene Bedingung für das ganze Problem besitzt. Denken wir uns nämlich eine kugelförmige Nebelwolke vom Radius S, welche n Nebeltröpfchen vom Radius a enthält. Das Stokes'sche Gesetz bestimmt dann die relative Fallgeschwindigkeit eines jeden Tröpfchens in bezug auf die unmittelbar umgebende Gasmasse zu

$$\frac{2}{9}\frac{\sigma g a^2}{\mu},$$

aber ebenso ergibt sich auch für die Nebelkugel als Ganzes eine Geschwindigkeit von

$$\frac{2}{9}\frac{n a^3 \sigma g}{\mu S},$$

somit kann das Stokes'sche Gesetz nicht mehr annähernd richtig sein, wenn

$$\frac{na}{S} > 1$$

ist, was mit der vorhin abgeleiteten Bedingung zusammenfällt.

Hieraus wird die physikalische Bedeutung derselben klar. Nur wenn eine genügend kleine Anzahl kleiner Teilchen eine große (aber dünne) Wolke bildet, ist jenes Gesetz gültig, sonst entstehen Strömungen des die Teilchen enthaltenden Mediums, welche die relative Fallgeschwindigkeit derselben ganz überdecken. Man bemerke noch, daß jene Bedingung eine recht weitgehende Einschränkung bedeutet; so kann offenbar bei einigermaßen undurchsichtigen Nebelwolken von der Gültigkeit des Stokes'schen Gesetzes keine Rede mehr sein. Denn die Verminderung der Durchsichtigkeit bedeutet, daß die gesamte Querschnittsumme $na^2\pi$ von gleicher Größenordnung ist wie der Querschnitt der Wolke S^2, während obige Bedingung erfordern würde: $a^2 n < aS$.

Allerdings beziehen sich alle diese Überlegungen nur auf Wolken, welche im freien Gasraume schweben, nicht auf solche, welche in Gefäßen mit starren Wänden eingeschlossen sind. Durch Kombination der hier dargelegten Methode mit jener von H. A. Lorentz (siehe voranstehende Arbeit von J. Stock) könnte man den Einfluß starrer Wände auf eine Nebelwolke theoretisch verfolgen; doch sieht man auch ohne weitere Rechnung ein, daß derselbe die

Gültigkeit des Stokes'schen Gesetzes begünstigen wird[1]), da er der Ausbildung von Konvektionsströmungen entgegenwirkt.

Daraus erklärt sich auch, daß z. B. Perrin in seinen Untersuchungen über Emulsionen jenes Gesetz genau bestätigt gefunden hat, da er eben das Fallen der Emulsionsteilchen in Kapillarröhren beobachtete. Er bemerkt ausdrücklich (Ann. Chim. Phys. **18** (1909) S. 46), daß in weiteren Röhren Konvektionsströmungen aufzutreten pflegen, welche die Erscheinungen modifizieren. Solche in geschlossenen Gefäßen auftretende, mitunter ziemlich gewaltsame Wirbelströmungen, welche an gewissen Stellen die Fallbewegung der Teilchen begünstigen, an anderen derselben entgegenwirken, kann man leicht beim Schlämmen von Pulvern beobachten.

Hiebei möchte ich auch auf eine gelegentlich gemachte Beobachtung hinweisen, daß sich ein aus kleineren und größeren Kugelteilchen bestehendes Pulver (Zinkstaub) mittels Schlämmen in seine Bestandteile nur dann zerlegen läßt, falls die Menge der suspendierten Substanz unter einer gewissen Grenze bleibt. Ist die Menge des suspendierten Stoffes zu groß, so fällt derselbe als einheitliche Masse heraus, indem die größeren Teilchen die kleineren fast vollständig mitreißen. Es scheint dies mit den hier behandelten Erscheinungen zusammenzuhängen, denn man ersieht schon aus Formel (11) und (12), daß eine kleine Kugel von einer großen viel mehr beeinflußt wird als umgekehrt, und dieser Umstand dürfte bei Überschreitung gewisser Dichtigkeitsgrenzen umsomehr hervortreten.

In großem Maßstabe treten Bewegungen quasi-suspendierter Teilchen auch bei der Elektrolyse auf, doch haben wir es in diesem Fall immer mit zwei gleichzeitig in entgegengesetzten Richtungen vor sich gehenden Wanderungsprozessen zu tun, deren Einfluß sich gerade kompensieren muß, ohne konvektive Strömungen zu veranlassen. Dagegen können solche wohl in den Fällen einseitiger Ionenwanderung in Gasen auftreten, und es ist hier bei Anwendung der Stokes'schen Formel Vorsicht geboten.

Auch drängt sich die Frage auf, ob sich die Abweichungen von jener Formel nicht bei den Bestimmungen der elementaren Ionenladung nach der J. J. Thomson'schen und Wilson'schen Nebelmethode geltend machen.

[1]) In der Nähe der Wand kommt allerdings auch ein unmittelbarer hemmender Einfluß von der Größenordnung a/d, wo d die Distanz von derselben bedeutet, zur Geltung.

Es ist schwer, sich hierüber ein Urteil zu bilden, denn einerseits ist daselbst die hier abgeleitete Bedingung sicherlich weit überschritten, andererseits spielt sich aber der ganze Vorgang in einem geschlossenen Gefäß, zwischen den Kondensatorplatten ab. Vermutlich werden hier schwer kontrollierbare Nebenumstände (Ungleichförmigkeit der Ionisierung, Verhältnis des vom Nebel eingenommenen Raumes zum ganzen Gasraum) als Fehlerquellen von großer Bedeutung auftreten. Auch ist vorauszusehen, daß selbst bei Ausschluß größerer Konvektionsströmungen Gruppen von zufälligerweise dichterer oder dünnerer Konstellation eine größere oder geringere Fallgeschwindigkeit annehmen müssen, daß sich somit die Nebelmasse mit der Zeit in vertikaler Richtung ausbreiten werde und daß deren obere Grenzfläche eine geringere als die mittlere Fallgeschwindigkeit besitzen müsse.

Cunningham[1]) hat eine Formel zur Abschätzung des Unterschiedes der Geschwindigkeit einer Wolke und eines einzelnen Teilchens abgeleitet, doch es scheint mir, daß jene Formel über die Anwendbarkeit des Stokes'schen Gesetzes in der Praxis keinen Aufschluß gibt. Denn bei der Ableitung derselben wird stillschweigend vorausgesetzt, daß jedes Teilchen nur unter der Einwirkung der unmittelbar benachbarten steht und daß sämtliche Teilchen genau denselben (nur von deren Dimensionen und Abständen, aber weder von deren Lage noch von der Größe und Gestalt der Wolke abhängigen) Bewegungszustand besitzen.

Im Falle frei schwebender Wolken haben wir die Unrichtigkeit dieser Annahmen nachgewiesen, und für „eingeschlossene" Nebel ist eben vor allem die Frage zu entscheiden, inwiefern dieselben erfüllt sind.

Nach alledem scheint mir ein gewisses Mißtrauen gegen die Anwendung der Stokes'schen Formel auf derartige „dichte" Nebel, auch wenn sie in Gefäßen eingeschlossen sind, sehr geboten und dürften heute die an einzelnen, getrennten Kügelchen vorgenommenen Fallversuche[2]) und die hieraus abgeleiteten Werte der Ionenladung gewiß weitaus vorzuziehen sein.

---

[1]) Cunningham, Proc. Roy. Soc. **83** (A) S. 357 (1910).

[2]) Zeleny, Phys. Zeitschr. **11** S. 78 (1910); Millikan, Phys. Zeitschr. **11** S. 1097 (1910).

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.
SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES.

DERNIERS MÉMOIRES PARUS.

(Les titres des Mémoires sont donnés en abrégé).

S. Tołłoczko. Auflösung verschiedener Flächen d. Gipses . . . . Juin 1910
S. Tołłoczko, J. Tokarski. Wachstums- und Auflösungsgeschwindigkeiten der Kristalle; Reversibilität d. Vorgänge . . . . Juin 1910
T. Koźniewski. Alkaloide d. Wurzeln v. Sanguinaria Canadensis . Juin 1910
W. Łoziński. Endmoränen d. Bug-Tieflandes . . . . Juin 1910
L. Natanson. Double Refraction in electric or magnetic field . . Juin 1910
St. Loria, C. Zakrzewski. Die optischen Konstanten einiger das Kerr-Phänomen aufweisenden Substanzen . . . . Juin 1910
K. Jabłczyński, St. Jabłoński. Réactions dans les systèmes hétérogènes. Influence de l'alcool . . . . Juin 1910
M. Smoluchowski. Transpiration, diffusion etc. in gases . . . . Juill. 1910
S. Zaremba. Problème relatif à l'équation de Laplace . . . . . Juill. 1910
T. Estreicher, A. Schnerr. Verdampfungswärme einiger Gase . . Juill. 1910
T. Estreicher, M. Staniewski. Chlor in tiefen Temperaturen . . Juill. 1910
J. Buraczewski, Z. Zbijewski. Br, J. Körper d. Curarealkaloide . Juill. 1910
J. Buraczewski, Z. Zbijewski. Einwirkung des Chlors auf Strychnin, Brucin, Cinchonin, Chinin etc. . . . . Juill. 1910
J. Buraczewski, M. Dziurzyński. Einwirkung von Azeton auf Dijodstrychnin und Br-Produkte des Strychnins etc. . . . . . . Juill. 1910
M. Limanowski. Quecksilberbergbau in Idria . . . . Juill. 1910
W. Staronka. Additionsprodukte d. Hg-Salze mit Basen . . . . Juill. 1910
W. Czernecki. Oxyproteinsäuren in Körperflüssigkeiten etc. . . . Juill. 1910
W. Vorbrodt. Phosphorverbindungen in den Pflanzensamen . . . Oct. 1910
W. Rogala. Oligozänbildungen am „Roztocze lwowsko-rawskie" . . Oct. 1910
L. Bruner, S. Czarnecki. Photokinetik d. Br-Substitution . . . Nov. 1910
L. Bruner, Z. Łahociński. Photokinetik d. Br-Substitution . . . Nov. 1910
St. Niementowski. Oxanhydroverbindungen . . . . Nov. 1910
Z. Jakubowski. Chinolin-5-Karbonsäure I . . . . Nov. 1910
J. Hetper. Einfluß d. Chamäleons auf org. Körper . . . . . . Nov. 1910
J. Salibill. Wirkung d. Lichtes auf d. Bromierung . . . . . . Nov. 1910
J. Niedźwiedzki. Jüngere Tertiärbildungen in der nördl. Bukowina Déc. 1910
T. Wiśniowski. Kohlenformation der Gegend von Krakau . . . Déc. 1910
S. Pawłowski. Temperatur fließender Gewässer Galiziens . . . . Déc. 1910
W. Sierpiński. Théorie des fonctions discontinues . . . . . . Déc. 1910
A. Rosenblatt. Gestalten der algebraischen Kurven 6. Ordnung . Déc. 1910

Avis.

Les livraisons du «Bulletin International» se vendent séparément. — Adresser les demandes à la Librairie «Spółka Wydawnicza Polska», Rynek Gł., Cracovie (Autriche).